Wir wissen schon, dass der Körper der reellen Zahlen die Körperaxiome erfüllt. Die Körperaxiome sind nämlich:

Additive Eigenschaften:

K1: Je zwei Elementen a,b e K ist eindeutig ein Element a+b e K zugeordnet, dass Summe von a und b heißt.

K2: Für a, b, c gilt das Assoziativgesetz

(a+b)+c=a+(b+c)

K3: Es gibt ein Element 0 e K, so dass für alle a e K gilt:

a + 0 = a

K4: Zu a e K gibt es x e K mit a + x = 0

K5: Für a, b e K gilt das Kommutativgesetz:

a + b = b + a

Multiplikative Eigenschaften:

K6: Für a, b e K ist eindeutig ein Element ab e K zugeordnet, das Produkt von a und b heißt

K7: Für a, b, c e K gilt das Assoziativgesetz:

(ab)c = a(bc)

K8: Es gibt ein Element 1 e K \ {0}, so dass für alle a e K gilt:

a1 = a

K9: Zu a e K \ {0} gibt es x e K mit ax = 1

K10: Für a,b e K gilt das Kommutativgesetz:

ab = ba

Zusammenspiel von additiver und multiplikativer Struktur:

K11: Für a, b, c e K gilt das Distributivgesetz

(a+b)c = ac +bc

Jetzt wird gezeigt, dass diese Körpereigenschaften auch für die Komplexen Zahlen gelten:

Komplexe Zahlen und ihre Interaktionen sind nämlich folgend definiert:

1. Sie sind ein geordnetes Paar (a, b), wo a,b e R. Dies können wir aber auch schreiben als a + bi.
2. Die Menge aller komplexen Zahlen wird durch C bezeichnet
   * C = {a + bi: a, b e R}
3. Definition von Addition und Multiplikation in C:
4. (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d) i
5. (a + bi) (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc) i

Durch die Definition 3a ist K1 gegeben:

a, b e C 🡪 a = e + fi, b = g + hi 🡪

a + b = (e + g) + (f + h)i

Da e+g eindeutig ist und f+h eindeutig ist, ist das geordnete Paar auch eindeutig

K2 …

K3 …

K4 …

K5 …

K6 …

K7 …

K8 …

K9 …

K10 …

K11 …

Nun sind die Körpereigenschaften für die komplexen Zahlen gezeigt.

Die komplexen Zahlen sind also auch ein Körper